CONCOURS SPECIAL — Session de 1977

M A T H E M A T I Q U E S II

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Documents autorisés : - Tables de logarithmes
- Tables de valeurs numériques
- Règle à calcul

Soit x'Ox, y'Oy, z'Oz le repère orthonormé positif de l'espace euclidien. Son origine est O ; les axes x'Ox, y'Oy, z'Oz ont pour vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. La constante a > 0 est mesure d'une longueur.

1 - On considère la courbe (Γ) lieu du point P, défini par :
$\overrightarrow{OP} = (a \cos u + a \operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{u}{2})\vec{i} + (a \sin u)\vec{j}$, lorsque u varie de 0 à π

[Log = logarithme népérien]

1.1. - Construire (Γ)

1.2. - Montrer que $\vec{T} = \cos u\, \vec{i} + \sin u\, \vec{j}$ est vecteur unitaire de la tangente orientée en P à (Γ), la branche $0 < u < \frac{\pi}{2}$ étant orientée dans le sens des x croissants et la branche $\frac{\pi}{2} < u < \pi$ dans le sens des x décroissants.
Soit Q le point d'intersection de cette tangente avec l'axe x'Ox ; par quel scalaire faut-il multiplier $\vec{T}$ pour obtenir $\overrightarrow{PQ}$?

1.3. - Soit C le centre de courbure de (Γ) en P. Calculer les coordonnées (x_C , y_C) de C et le rayon de courbure R(u) de (Γ) en P $\left[\overrightarrow{PC} = R(u)\, \vec{N}\right.$, où $\vec{N}$ est le vecteur unitaire du plan xOy défini par $\left.(\vec{T},\vec{N}) = + \frac{\pi}{2}\right]$.
Soit (D) le lieu de C. Vérifier que (D) a pour équation cartésienne dans le plan xOy : $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$. Montrer que la normale PC est tangente à (D) au point C.

2 - La droite (G_u) s'appuie sur (Γ) en P et a pour vecteur unitaire :

$$\vec{\tau} = \cos\beta\, \vec{N} + \sin\beta\, \vec{k} \qquad \left[\beta \text{ est constant } \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right]$$

Lorsque u varie de 0 à π, (G_u) engendre une surface réglée (Σ) ; u et ρ sont les deux paramètres d'un point M décrivant (Σ) avec $\overrightarrow{PM} = \rho\vec{\tau}$
c'est-à-dire : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP}(u) + \rho\vec{\tau}(u)$

En établissant une relation entre u et ρ, soit $\rho = f(u)$, le point M décrit une courbe (L) tracée sur (Σ).

2.1. - Montrer qu'il existe une courbe (Δ) tracée sur (Σ) telle que, pour tout u, (Δ) soit tangente à (G_u). E désignera le point de contact.

2.2. - Déterminer le plan osculateur à (Δ) au point E. Ecrire la matrice de passage de la base $(\vec{T},\vec{N},\vec{k})$ pour (Γ) en P à la base de Frenet $\left[\vec{T_1},\vec{N_1},\vec{B_1}\right]$ pour (Δ) en E.

.../...

$\left[\overrightarrow{T_1} = \vec{\tau}\ ;\ \overrightarrow{N_1}\right.$ vecteur unitaire de la normale principale orientée vers le centre de courbure de (Δ) ; $\left.\overrightarrow{B_1} = \overrightarrow{T_1} \wedge \overrightarrow{N_1}\right]$

2.3. - Calculer le rayon de courbure R_1 de (Δ) en E.

2.4. - Montrer qu'en tout point de (G_u) différent de E, le plan tangent à (Σ) coïncide avec le plan osculateur en E à (Δ).

3 - 3.1. - Montrer que les trajectoires orthogonales des (G_u) (c'est à dire les courbes tracées sur (Σ) et coupant à angle droit chaque (G_u)) sont les sections de (Σ) par les plans $z = C^{te}$

3.2. - Plus généralement, les droites (Λ_u) dépendant du paramètre u, étant les génératrices rectilignes d'une surface réglée quelconque (S), (H_1) et (H_2) étant deux trajectoires orthogonales des génératrices (Λ_u), M_1 et M_2 étant les points d'appui de (Λ_u) sur (H_1) et (H_2), montrer que : $\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\|$ = Constante.

3.3. - Montrer que les courbes tracées sur (Σ), coupant chaque (G_u) sous un angle de $\frac{\pi}{4}$ [(Σ) est la surface considérée en 2] se répartissent en deux familles à un paramètre. Pour chaque famille, si l'on suppose connue une courbe de la famille, comment en déduire les autres courbes ?

4 - <u>Cinématique</u> - On se donne par $\rho = f(u)$ une courbe (L) de (Σ). Prenant pour loi de temps <u>$u = \omega t$</u> [$\omega > 0$ constante mesure d'une vitesse angulaire ; t varie donc de 0 à $\frac{\pi}{\omega}$] le mouvement de M par rapport au trièdre absolu $[O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}]$ est connu. Le mouvement relatif de M est celui sur la génératrice (G_u) [Origine en P]

4.1. - Déterminer sur la base non orthogonale $(\vec{T},\ \vec{N},\vec{\tau})$ les composantes des vecteurs $\vec{\Gamma}_a$, $\vec{\Gamma}_e$, $\vec{\Gamma}_c$, $\vec{\Gamma}_r$ des accélérations absolue , d'entraînement, complémentaire, relative, du mobile M.

4.2. - Montrer que les courbes (L) $\rho = f(u)$ telles qu'à tout instant les vecteurs vitesse absolue et accélération absolue de M soient orthogonaux, s'obtiennent par l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre, contenant déjà une constante (cette intégration n'est pas demandée).

5 - <u>Cinématique</u> - Le trièdre absolu est $[O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}]$, le trièdre relatif est maintenant $[P\ ;\ \vec{T},\ \vec{N},\ \vec{k}]$. Une particule μ liée au trièdre relatif a pour coordonnées (constantes) : X, Y, Z ; $\overrightarrow{P\mu} = X\vec{T} + Y\vec{N} + Z\vec{k}$. On conserve la loi de temps <u>$u = \omega t$</u>. La distribution des vitesses (absolues) des particules est celle des moments résultants d'un torseur des vitesses

.../...

(à l'instant t).

5.1. - Etudier les questions suivantes : réduction du torseur, axe central du torseur, mouvement instantané tangent, vecteur rotation du trièdre absolu par rapport au trièdre relatif.

5.2. - Soient les deux particules μ_1 et μ_2 de coordonnées dans le trièdre relatif $[P ; \vec{T}, \vec{N}, \vec{k}]$ $\mu_1 [0, a\sqrt{3}, a\sqrt{3}\ tg\ \beta]$ et $\mu_2 \left[0, -\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{a}{\sqrt{3}} tg\ \beta\right]$. Montrer que leurs vecteurs vitesses $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont colinéaires et donner une expression (aussi simple que possible) de $\frac{\overrightarrow{V_1}}{\overrightarrow{V_2}}$

6 - On prend $\beta = \frac{\pi}{4}$, dans cette dernière partie.

Soit d la plus courte distance de la génératrice (G_u) et de la génératrice $(G_{\frac{\pi}{2}})$ d'équations :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = a \end{cases}$$

Lorsque u tend vers $\frac{\pi}{2}$, d tend vers 0.
Posant $h = \frac{\pi}{2} - u$, trouver la partie principale de l'infiniment petit d, en prenant h pour infiniment petit principal.

NOTA : **La partie 6 est indépendante des parties 4 et 5.**

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail